

КИЇВСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

Контрольне завдання з математики міського конкурсу МАН-2017

Відділення математики

11 клас

1. Знайти всі прості чотиризначні числа, цифри яких утворюють арифметичну прогресію. Відповідь обґрунтувати.

2. Розв'язати рівняння

$$\log_2(3 - |\sin x|) = 2^{-\left|\frac{\pi}{2} - x\right|}.$$

3. Знайти всі значення параметра a , при яких сума коренів рівняння

$$x^2 + 2a(a - 5)x - 2(5a^3 - 19a^2 + 36) = 0$$

набуває найбільшого значення.

4. Довести, що для всіх $a > 1, b > 1$ має місце нерівність

$$3\log_b a + \log_a b + \log_{a^2} b > 4.$$

5. Із пункту A в пункт B вийшов пішохід. Не пізніше ніж через 40 хв. слідом за ним вийшов другий. Відомо, що в пункт B один із них прийшов раніше другого не менше, ніж на 1 год. Якби пішоходи вийшли одночасно, то вони б прийшли в пункт B з інтервалом не більше ніж в 20 хв. Визначити, скільки часу знадобиться кожному пішоходу на шлях від A до B , якщо швидкість одного з них в 1,5 рази більша швидкості другого.

6. Визначити геометричне місце вершин парабол $y = x^2 + bx + c$, які дотикаються параболи $y = 2x^2$.

7. В правильну трикутну піраміду, бічні грані якої нахилені до площини основи під кутом φ , вписано циліндр так, що одна основа циліндра лежить в площині основи піраміди, а коло другої його основи дотикається бічних граней піраміди. Радіус основи циліндра дорівнює r , а висота циліндра - $2r$. Обчислити об'єм піраміди. При якому значенні кута φ об'єм піраміди найменший?

КИЇВСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

Контрольне завдання з математики міського конкурсу МАН-2017

Відділення математики

10 клас

1. У деякому натуральному трицифровому числі a , записаному у десятковій системі числення, поміняли місцями першу та другу цифри. В результаті отримали нове число b . Сума цифр числа a дорівнює 10, а різниця чисел a і b кратна 63. Знайти суму чисел a і b .

2. При всіх значеннях параметра a розв'язати рівняння

$$\sqrt{x-a} = \sqrt{x} - a.$$

3. Знайти всі пари цілих чисел (x, y) , для яких справджуються обидва співвідношення

$$10x - 13y^2 + 87 \geq 0 \text{ і } 7x - 5y^2 + 53 \leq 0.$$

4. Знайти найменше значення виразу

$$x^2(x+y)^{-1} + y^2(y+z)^{-1} + z^2(z+x)^{-1},$$

якщо $x > 0, y > 0, z > 0$ і $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

5. Моторний човен спустився вниз за течією річки на 20 км і піднявся вгору по притоці ще на 10 км, витративши на весь шлях 1 год. 10 хв. На зворотній шлях човну знадобилось 1 год. 20 хв. Знаючи, що швидкість течії річки дорівнює швидкості течії притоки, знайти власну швидкість човна.

6. У трикутнику ABC проведена бісектриса AK . Центр кола, вписаного в трикутник AKC , збігається з центром кола, описаного навколо трикутника ABC . Визначити внутрішні кути трикутника ABC .

7. В трапеції $ABCD$ дано основи $AB=4, BC=1$ і внутрішні кути $\angle A = \arctg 2, \angle D = \arctg 3$. Знайти довжину радіуса кола, вписаного в трикутник CBO , де O – точка перетину діагоналей трапеції.

КИЇВСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

Контрольне завдання з математики міського конкурсу МАН-2017

Відділення математики

9 клас

1. Дано два натуральних трицифрових числа, записаних в десятковій системі числення, причому друге число записане тими самими цифрами, що й перше, але у зворотному порядку. Різниця цих чисел більша за 700, а друга цифра кожного є середнім арифметичним першої і третьої. Знайти суму цих чисел.

2. Визначити кількість розв'язків рівняння

$$|x^2 - 2|x|| - a = 0 \quad \text{в залежності від параметра } a.$$

3. Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких існує єдина трійка чисел (x, y, z) , яка задовольняє рівності

$$x + y + z = x^2 + 4y^2, \quad 3x + 2y + z = a.$$

4. Для невід'ємних дійсних чисел a , b і c довести нерівність $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

5. Із пунктів A і B назустріч один одному одночасно вийшли два пішоходи. Коли перший пройшов половину шляху, другому до кінця шляху залишилось пройти 24 км, а коли другий пройшов половину шляху, першому до кінця шляху залишилось пройти 15 км. Скільки кілометрів залишиться пройти другому пішоходу після того, як перший завершить перехід?

6. Довжина одного із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12. Відстань від центра описаного навколо трикутника кола до цього катета дорівнює 2,5. Знайти довжину радіуса кола, вписаного в цей трикутник.

7. Довжини бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ дорівнюють відповідно 8 см і 10 см, а довжина основи BC дорівнює 2 см. Бісектриса кута ADC проходить через середину сторони AB . Знайти площу трапеції.

КИЇВСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

Контрольне завдання з математики міського конкурсу МАН-2017

Відділення комп'ютерних наук та відділення технічних наук

11 клас

1. Знайти всі тризначні натуральні числа, кратні 45 і цифри яких утворюють арифметичну прогресію. Відповідь обґрунтувати.

2. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{3}}(3 + |\sin x|) = 2^{|x|} - 2$.

3. Знайти всі значення параметра a , при яких сума коренів рівняння $x^2 + 2a(a - 7)x - 2(7a^3 - 37a^2 + 72) = 0$ набуває найбільшого значення.

4. Довести, що для всіх $a > 0$ має місце нерівність

$$\log_3^2 a + 2 \log_3 a \log_3 \frac{3}{a} \leq 1.$$

5. Із пункту A в пункт B вийшов пішохід. Не пізніше ніж через 1 год. 20 хв. слідом за ним вийшов другий. В пункт B спочатку прийшов один із пішоходів, а другий досяг B не раніше, ніж через 2 год. після цього. Якби пішоходи вийшли одночасно, то вони прибули б в пункт B з інтервалом не більше, ніж в 40 хв. Визначити, скільки часу знадобиться кожному пішоходу на шлях від A до B , якщо швидкість одного з них в 2 рази більша швидкості другого.

6. Визначити геометричне місце вершин парабол $y = x^2 + bx + c$, які дотикаються параболи $y = 3x^2$.

7. Основа трикутної піраміди – рівнобедрений прямокутний трикутник. Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють φ . В піраміду вписано циліндр так, що одна основа циліндра лежить в площині основи піраміди, а коло другої його основи дотикається бічних граней піраміди. Радіус основи циліндра дорівнює r , а висота циліндра $3r$. Обчислити об'єм піраміди. При якому значенні кута φ об'єм піраміди найменший?

КИЇВСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

Контрольне завдання з математики міського конкурсу МАН-2017

Відділення комп'ютерних наук та відділення технічних наук

10 клас

1. У деякому натуральному трицифровому числі a , записаному у десятковій системі числення, поміняли місцями першу та другу цифри. В результаті отримали нове число b . Сума цифр числа a дорівнює 10, а різниця чисел a і b кратна 63. Знайти різницю чисел a і b .

2. При всіх значеннях параметра a розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}.$$

3. Знайти всі пари цілих чисел (x,y) , для яких справджуються обидва співвідношення

$$10x - 11y^2 + 83 \geq 0 \text{ і } 7x - 3y^2 + 47 \leq 0.$$

4. Знайти найменше значення виразу

$$(x + y + z)^6 (xy^2z^3)^{-1},$$

якщо $x > 0, y > 0, z > 0$.

5. Моторний човен спустився вниз за течією річки на 18 км і повернувся назад, витративши при цьому на весь шлях 1 год. 45 хв. Знайти власну швидкість човна, якщо відомо, що 6 км за течією річки човен пропливає на 5 хв. швидше, ніж проти течії.

6. Продовження медіан AM і BK трикутника ABC перетинають описане навколо нього коло в точках E і F відповідно, причому $AE:AM=2:1$, $BF:BK=3:2$. Визначити внутрішні кути трикутника ABC .

7. В трапеції $ABCD$ довжини основ AD і BC відносяться як 5:1, а площа дорівнює 32 см^2 . Точки M і N – середини бічних сторін AB і CD відповідно з'єднані з кінцями протилежної бічної сторони, причому відрізки AN і DM перетинаються в точці K , а відрізки BN і CM – в точці E . Визначити площу чотирикутника $MENK$.

КИЇВСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

Контрольне завдання з математики міського конкурсу МАН-2017

Відділення комп'ютерних наук та відділення технічних наук

9 клас

1. Дано два натуральних трицифрових числа, записаних в десятковій системі числення, причому друге число записане тими самими цифрами, що й перше, але у зворотному порядку. Різниця цих чисел більша за 700, а друга цифра кожного є середнім арифметичним першої і третьої. Знайти різницю цих чисел.

2. Визначити кількість розв'язків рівняння

$$|x^2 - 2x| - a = 0 \quad \text{в залежності від параметра } a.$$

3. Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких існує єдина трійка чисел (x, y, z) , яка задовольняє рівності

$$x + y + z = x^2 + 9y^2, \quad 3x + 2y + z = a.$$

4. Для невід'ємних дійсних чисел a і b довести нерівність $(a + b)(a + 2)(b + 2) \geq 16ab$.

5. Із пунктів A і B назустріч один одному одночасно вийшли два пішоходи. Коли перший пішохід пройшов четверть шляху від A до B , другому до кінця шляху залишилось пройти 1,5 км, а коли другий пішохід пройшов половину шляху від B до A , перший знаходився на відстані 2 км від другого. Знайти відстань від A до B , якщо відомо, що другий пішохід йшов швидше першого.

6. Довжина одного із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12. Відстань від центра описаного навколо трикутника кола до цього катета дорівнює 2,5. Знайти периметр трикутника.

7. Довжини бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ дорівнюють відповідно 8 см і 10 см, а довжина основи BC дорівнює 2 см. Бісектриса кута ADC проходить через середину сторони AB . Знайти довжини діагоналей AC і BD .